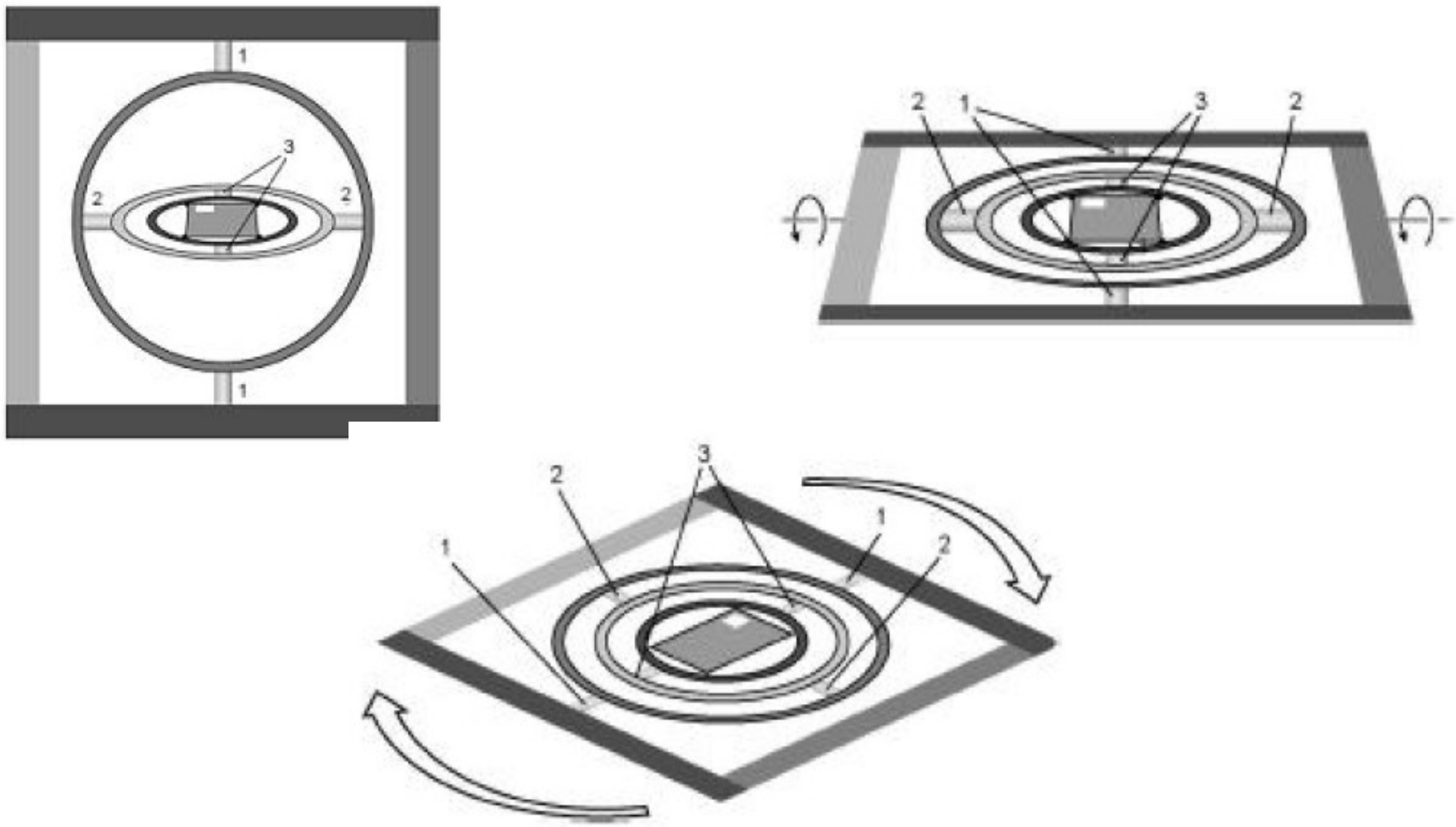
Representation av rotation

- Eulervinklar
  - Rotation kring axlarna (t.ex. Zyx)
    $A' = R_{yaw} R_{pitch} R_{roll} A$
  - Intuitivt, fast svårt att göra
  - Interpolation av rotation nontrivialt, problem med olinjärt beteende
  - Problem med gimbal lock kan förekomma

Problem med Eulervinklar

- Gimbal lock!



Representation av rotation

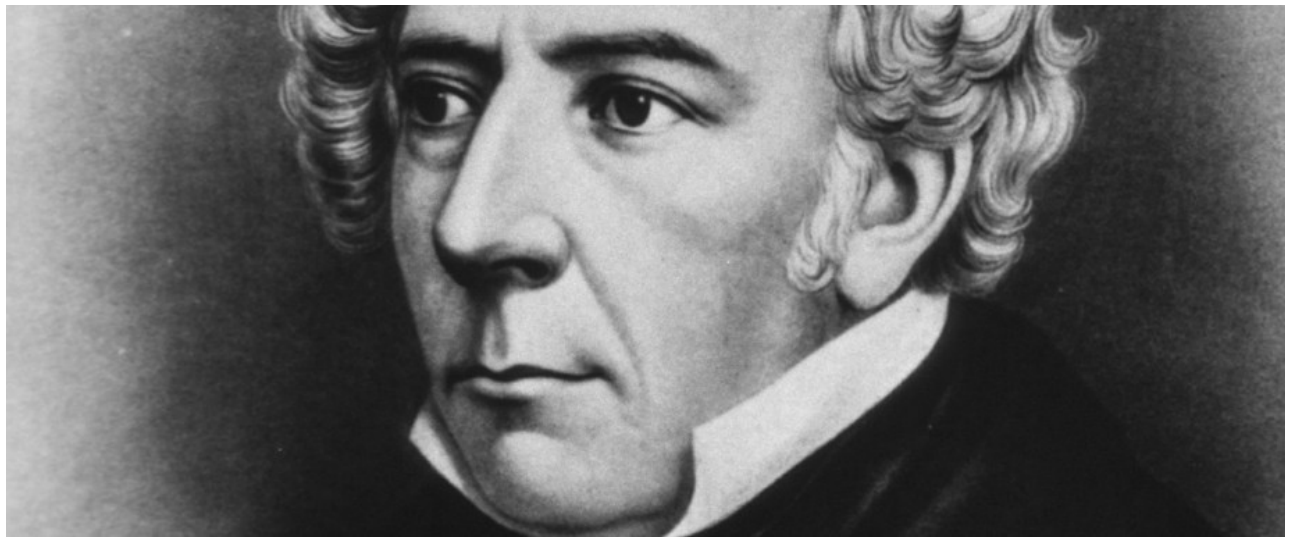
- Andra möjligheter
  - Orthonormal matris
    enkelt att kombinera olika operationer
    (rotation, translation mm)
  - Separat rotationsaxel och vinkel
  - 3-komponentvektor (nästan som quaternion)
    längd=vinkel

- Men hur gör man interpolation?

Kvaternioner

- Formulerat av Sir William Rowan Hamilton
  - Letade efter tredimensionella komplexa tal

- Länge bortglömt, comeback på senare 1900-tal
  - Används för rotationen inom (rymd)flyget, robotik mm



Kvaternioner

- Definition: Kvaternjon q = w + x**i** + y**j** + z**k**, med w,x,y,z reela tal

- Kan också skrivas: q = (w,**n**) där **n** är en tredimensionell vektor
(w realdel, **n** imaginärdelen)

- Kan också betraktas som en rotation med vinkel v om en valfri axel **n**

  q=(cos(v/2),sin(v/2)**n**)

Rotation med kvaternioner

- Vektor r:
  - Skapa Kvaternion p = (0,r)
  - Kan nu roteras genom operationen:
    $p' = q \cdot p \cdot q^*$ (q^* = konjugat, definieras senare)
- Kan enkelt kombinera rotationer

Räkna med kvaternioner

- Flerdimensionell generalisering av komplexa tal
  - **$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$**
- De flesta operationer fungerar som vanligt, dock inte kommunitativitet på multiplikation

  $qp \neq pq$

Räkna med kvaternioner

- Multiplikation av i, j och k

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

OBS! Jämför x, y, z!

Räkna med kvaternioner

- Multiplikation av två kvaternioner:

$$
\begin{aligned}
&(w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k)(w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k) = \\
&\quad w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \\
&+ (w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2) i \\
&+ (w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2) j \\
&+ (w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2) k
\end{aligned}
$$

Vanlig multiplikation av polynom + definition av i, j, k!

Räkna med kvaternioner

- Konjugat q*:
  $q=(w,n)$, $q^*=(w,-n) = (w, -xi, -yj, -zk)$
- Magnitud:
  $|q|^2 = qq^* = q^*q = w^2 + |n|^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$
- Kvadratrot av magnitud = norm
- Enhetskvaternion: kvaternion med norm=1
  - Erhålles genom att dela kvaternion med norm
- Invers: $$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \cdot (w, -n)$$

Kvaternion till matris

$$M = \begin{bmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2(x^2+z^2) & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wz & 1-2(x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

alternativt:

$$\begin{bmatrix} w^2+x^2-y^2-z^2 & 2xy+2wz & 2xz-2wy & 0 \\ 2xy-2wz & w^2-x^2+y^2-z^2 & 2yz+2wx & 0 \\ 2xz+2wy & 2yz-2wx & w^2-x^2-y^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2+x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix}$$

Matris till kvaternion

Tredimensionell matris:
Matrisspår:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{bmatrix}$$

w = $\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{T}}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{a+e+m+1}$

$$x = \frac{h-f}{4w}$$

$$y = \frac{c-g}{4w}$$

$$z = \frac{d-b}{4w}$$

T = a + e + m + 1

T ≈ 0 kräver viss korrektion

Exponentialfunktioner (viktigt!)

Vi definerar för $q = (\cos(v/2), \sin(v/2)n)$:

$q^t = (\cos(tv/2),\sin(tv/2)n)$

Dessutom för $q= (w,tn)$:

$\exp(q) = e^w(\cos(t), \sin(t)n)$

$\Leftrightarrow q = R \exp((0,n)t)$, med $|n| = 1$, $R=1$ för enhetskvaternion
$\log(q) = (\log(R), nt)$

$\Leftrightarrow q^t = \exp(t \log(q))$

Interpolation m. kvaternioner: Slerp

- Spherical linear interpolation
- $\text{slerp}(t, q_1, q_2) = (q_2\, q_1^{-1})^t\, q_1$
  (med q_1,q_2 valfria kvaternioner, t interpolationssteg som är ett reelt tal mellan 0 t.o.m. 1)
- $q = (q_2 q_1^{-1})^t q_1 = q_1(q_1^{-1} q_2)^t = q_2(q_2^{-1} q_1)^{1-t} = (q_1 q_2^{-1})^{1-t} q_2$
- Interpolera med konstant hastighet

Interpolation m. kvaternioner: Slerp

- Problem: Vid interpolation mellan flera kvaternioner med slerp blir det diskontinuitet i hastigheten när vi byter från ett kvaternionpar till nästa
- Samma problem som interpolation mellan linjesegment

Interpolation m. kvaternioner: Squad

- Lösning (liknar Béziersplines):

Definerar:

squad(t,a,p,q,b) = slerp(2t(1-t), slerp(t,a,b), slerp(t,p,q)),
med a,b,q,b kvaternioner, t interpolationssteg

för att få kontinuitet vid interpolation:

$q_i = a_i \exp(-(\log(a_{i+1}a_i^{-1}) + \log(a_{i-1}a_i^{-1}))/4)$

och interpolera med

squad(t, a_i, q_i, q_{i+1}, a_{i+1}(

SLERP = multiplikativ interpolation

$$(a-b)t + b$$

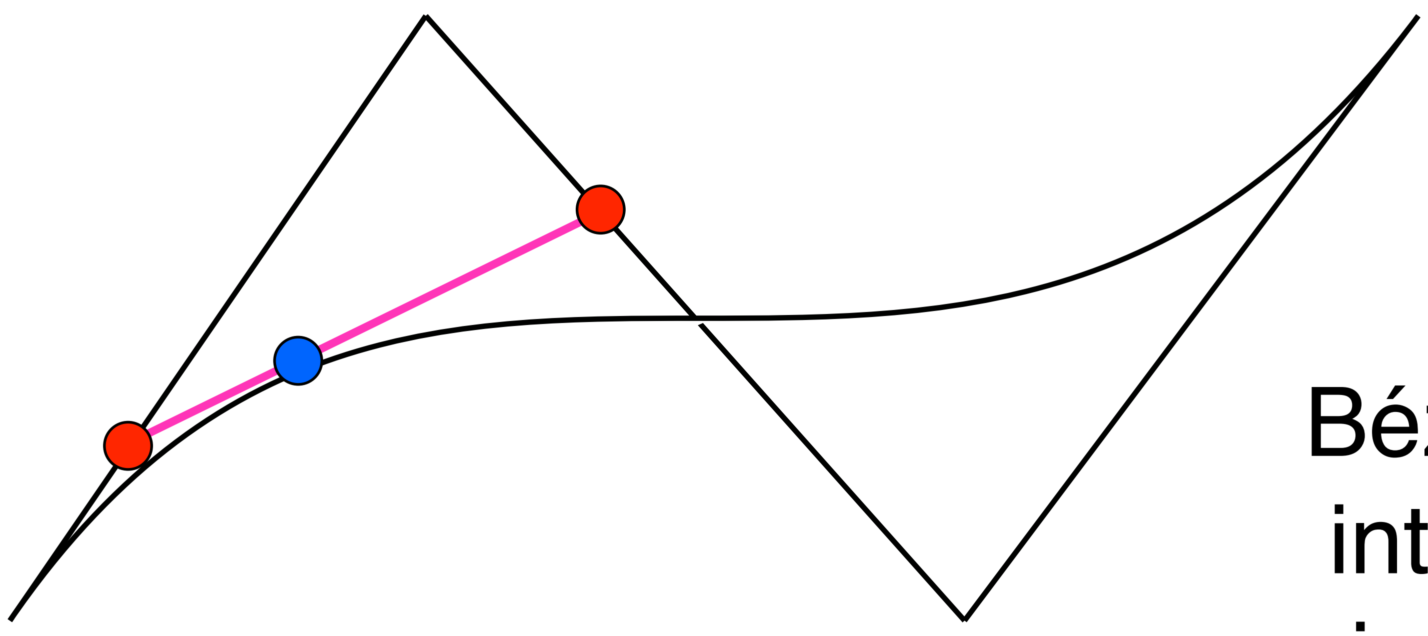
$$\left(\frac{a}{b}\right)^t \cdot b$$

Vanlig linjär

Multiplikativ

SQUAD = interpolation av interpolationer

jfr de Casteljau



Bézierkurva från interpolation av interpolationer

Länkar

Wikipedia:
http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation

Bok om matematik inom datorgrafik:
http://books.google.com/books?id=bfcLeqRUsm8C&lpg=PA86&ots=FpUpf6p_hw&dq=quaternions%20in%20computer%20graphics&pg=PA88#v=onepage&q=quaternions%20in%20computer%20graphics&f=false

Slerp paper:
http://dl.acm.org/citation.cfm?doid=325334.325242

Sammanfattning, kvaternioner

- 3-dimensionella komplexa tal

- Bra representation av rotation m.a.p. SLERP och SQUAD

- Notera likheter med 3D-koordinater och likhet mellan SQUAD och splines